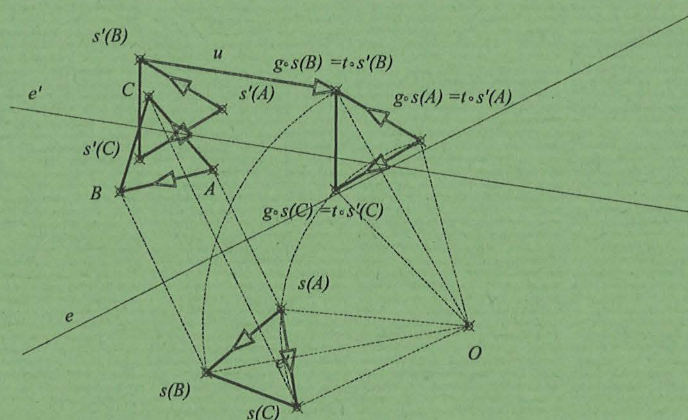
ISOMETRÍAS, ISOMETRÍAS EN EL PLANO

Por

MANUEL IGLESIAS GUTIÉRREZ DEL ÁLAMO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-47-03

ISOMETRÍAS,
ISOMETRÍAS EN EL PLANO

Por

MANUEL IGLESIAS GUTIÉRREZ DEL ÁLAMO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-47-03

C U A D E R N O S
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

NUMERACIÓN

3 Área
47 Autor
03 Ordinal de cuaderno (del autor)

ÁREAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

ISOMETRÍAS, ISOMETRÍAS EN EL PLANO

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 213.01/ 3-47-03
ISBN-13: 978-84-9728-194-2
ISBN-10: 84-9728-194-2
Depósito Legal: M-14759-2006

ÍNDICE

ISOMETRÍAS

Def 1: Isometría afín:

Sea un espacio afín euclídeo $A=(X,V)$, se llama isometría afín a toda transformación afín (f,φ) en A que conserva las distancias, es decir:

$\forall P,Q\in X$, se verifica : $d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$.

Por ser afinidad se cumple:

- Dado un subespacio afín $S=P+L$, $S\subset X$, se transforma mediante una isometría (f,φ) en otro subespacio afín $f(S)=f(P)+\varphi(L)$, $f(S)\subset X$.
- Conserva el paralelismo, es decir dos subespacios paralelos se transforman en subespacios paralelos.
- Transforma variedades que se cruzan en variedades que se cruzan.
- Conserva baricentros.
- Conserva alineaciones de puntos.
- Conserva razones simples.

Prop 1:

La aplicación lineal φ asociada a una isometría afín es un endomorfismo ortogonal, es decir:

Si $\forall P,Q\in X$, se verifica : $d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$, entonces

$\forall u,v\in V$, se verifica : $\langle u,v\rangle=\langle\varphi(u),\varphi(v)\rangle$:

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l}\forall P,Q\in X, d(P,Q)=d(f(P),f(Q))\\ \text{Por definición de distancia euclídea :}\\ \left.\begin{array}{l} d(P,Q)=\left\|\overline{PQ}\right\|\\ \text{si} : \overline{PQ}=u\\ \text{como} : \left\|\overline{PQ}\right\|=\|u\|=+\sqrt{u^2}\end{array}\right\}\Rightarrow d(P,Q)=+\sqrt{u^2}\\ \text{y}\\ \left.\begin{array}{l} d(f(P),f(Q))=\left\|\overline{f(P)f(Q)}\right\|\\ \text{por ser afinidad :}\\ \overline{f(P)f(Q)}=\varphi\left(\overline{PQ}\right)=\varphi(u)=+\sqrt{\varphi(u)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow d(f(P),f(Q))=+\sqrt{\varphi(u)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow +\sqrt{u^2}=+\sqrt{\varphi(u)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle u,u\rangle=\langle\varphi(u),\varphi(u)\rangle.$$

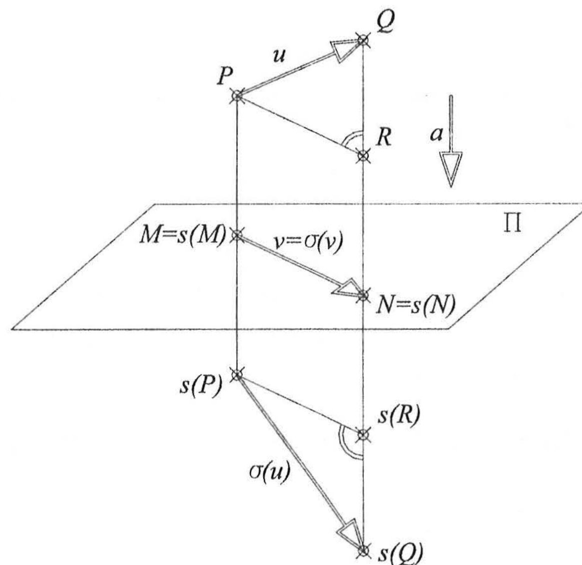
Corolario:

- Toda isometría afín es una biyección al ser la aplicación vectorial asociada un automorfismo.
- Conserva los ángulos.
- Transforma subespacios de dimensión n en otros de la misma dimensión, es decir rectas en rectas, hiperplanos en hiperplanos, etc...

Como ejemplo de isometría afín vamos a ver la simetría ortogonal, primero en el espacio afín euclídeo tridimensional ordinario y después en un espacio afín euclídeo genérico:

Simetría especular

En el espacio afín ordinario E_3 definimos simetría especular respecto de un plano Π, a una simetría con dirección ortogonal al plano dada por el vector a. Es una transformación que asocia a cada punto del espacio P, otro punto $s(P)$, de modo tal que la recta que une los dos puntos P y $s(P)$ tenga la dirección de a y el punto medio del segmento $\overline{Ps(P)}$ esté en el plano Π.



La transformación así definida sabemos que es una afinidad.

- *Cada punto del espacio tiene un único punto simétrico y cada punto es simétrico de otro, es decir, es una biyección.*
- *La aplicación lineal viene determinada por la aplicación entre puntos y es un isomorfismo.*
- *Conserva las distancias:*

$$P, s(P), s(R), \text{R es un paralelogramo} \Leftrightarrow \begin{cases} d(P,R) = d(s(P), s(R)) \\ \text{y} \\ d(P, s(P)) = d(R, s(R)) \end{cases}$$

$$\text{como } N \text{ es el punto medio de } \overline{Q, s(Q)} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} d(N,R) = d(N, s(R)) \\ \text{y} \\ d(N,Q) = d(N, s(Q)) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow d(R,Q) = d(s(R), s(Q)) \Bigg\} \Leftrightarrow$$

son iguales los ángulos que forman los segmentos $\overline{PR}$ con $\overline{RQ}$ y $\overline{s(P)s(R)}$ con $\overline{s(R)s(Q)}$

$\Leftrightarrow$ los triángulos P, R, Q y $s(P), s(R), s(Q)$ son iguales $\Leftrightarrow d(P,Q) = d(s(P), s(Q))$

La definición dada para el espacio ordinario también se puede generalizar para espacios afines de cualquier dimensión:

Definición:

Sea un espacio afín $A = (X,V)$ y $S \subset X$ un subespacio afín, $S = P + L$, sea $M \subset V$ un subespacio vectorial suplementario de la variedad de dirección de S, es decir:

$$L \cap M = \{\underline{0}\}$$

y

$$L + M = V$$

si además M es un subespacio ortogonal al subespacio L, llamaremos simetría ortogonal a la aplicación:

$$X \xrightarrow{s} X$$

$$P \to s(P) = P'$$

tal que:

- *El punto medio del segmento $\overline{PP'}$ pertenece a S, (los puntos medios son fijos),*
- *La variedad de dirección de la recta que determinan los puntos P y $s(P)$ está contenida en el subespacio M.*

La transformación así definida es una biyección y conserva las distancias.

Composición de isometrías.

En un espacio afín euclídeo $A = (X,V)$, sean dos isometrías:

$$(X,V) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X,V)$$

y

$$(X,V) \xrightarrow{(g,\psi)} (X,V)$$

Se llama composición de isometrías a la aplicación:

$$(X,V) \xrightarrow{(g \circ f, \psi \circ \varphi)} (X,V)$$

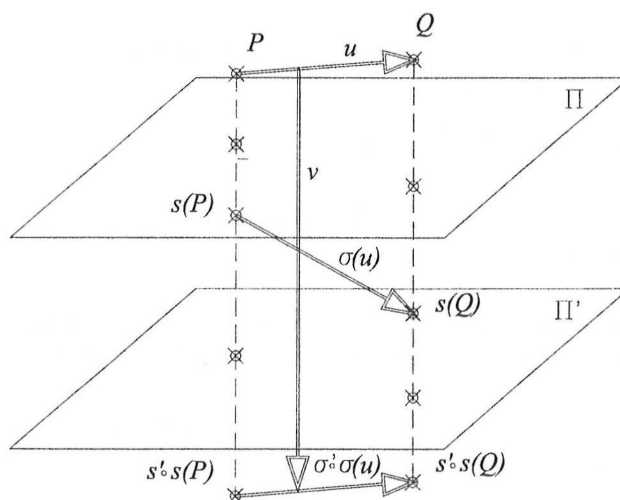
La composición es isometría:

a) Sabemos que la composición de afinidades es afinidad.
b) La composición conserva las distancias:
Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} d(g\circ f(P), g\circ f(Q)) = d(g(f(P)), g(f(Q))) \\ g \text{ es isometría} : d(g(f(P)), g(f(Q))) = d(f(P), f(Q)) \end{array}\right\} \Rightarrow d(g\circ f(P), g\circ f(Q)) = d(f(P), f(Q)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f \text{ es isometría} : d(f(P), f(Q)) = d(P,Q) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(g\circ f(P), g\circ f(Q)) = d(P,Q)$$

Como ejemplo: en el espacio afín ordinario tridimensional, componiendo dos simetrías ortogonales con planos paralelos obtenemos una traslación de vector v*, que tiene el módulo igual al doble de la distancia entre ambos planos,* $s' \circ s = t_v$ *con* $|v| = 2d(\Pi, \Pi')$.



Grupo ortogonal:

El conjunto de las isometrías en un espacio afín euclídeo $A = (X, V)$, es un grupo respecto de la composición, se llama grupo ortogonal y lo designamos por $\Theta(X)$.

Demostración:

a) Es asociativo.
b) El elemento neutro es la identidad, (i, e), donde:

$$X \xrightarrow{i} X$$
$$P \to i(P) = P, \forall P \in X$$
y
$$V \xrightarrow{e} V$$
$$u \to e(u) = u, \forall u \in V$$

c) Todas las isometrías son inversibles, es decir:

$$\forall (f,\varphi)\in \Theta(X), \exists (f^{-1},\varphi^{-1}) / (f^{-1}\circ f, \varphi^{-1}\circ\varphi) = (f\circ f^{-1}, \varphi\circ\varphi^{-1}) = (i,e)$$

Demostración:

- f es biyección, luego existe f^{-1}:
  $$\forall P', Q' \in X, \exists P, Q \in X / f^{-1}(P') = P, f^{-1}(Q') = Q.$$
- φ es isomorfismo, luego existe φ^{-1}: $\forall u' \in V, \exists u \in V / \varphi^{-1}(u') = u$.
- (f^{-1},φ^{-1}) es afinidad.
- Conserva las distancias, es decir: $\forall P', Q' \in X, d(f^{-1}(P'), f^{-1}(Q')) = d(P', Q')$

  Demostración:
  $$\left.\begin{array}{r} d(f^{-1}(P'), f^{-1}(Q')) = d(f^{-1}(f(P)), f^{-1}(f(Q))) = d(P,Q) \\ \text{como } f \text{ es isometría}: d(P,Q) = d(f(P), f(Q)) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow d(f^{-1}(P'), f^{-1}(Q')) = d(f(P), f(Q)) = d(P', Q')$$

Orientación en un espacio afín :

Dadas dos bases $B_1 = \{e_1, e_2, e_3, ...e_n\}$ y $B_2 = \{e'_1, e'_2, e'_3, ...e'_n\}$ de un espacio afín, diremos que tienen la misma orientación si la matriz de paso de una a otra tiene el determinante positivo, es decir:

$$\text{Si siendo: } e'_i = \sum^{n} a_{i,j} e_j, \forall i \in 1,2,3....n, \text{ se verifica}: \det(\{a_{1,j}\}) > 0$$

Se escribe $B_1 \approx B_2$.

Isometrías directas:

Diremos que una isometría es directa si conserva las orientaciones en el espacio, o lo que es igual, si los transformados de los vectores de cualquier base constituyen una base con la misma orientación.

$$\forall B = \{e_1, e_2, e_3 ......e_n\} \subset V, B \approx \varphi(B), \text{siendo } \varphi(B) = \{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) .....\varphi(e_n)\}$$

Solo depende de la aplicación lineal asociada, por tanto es una isometría afín directa si el isomorfismo asociado es un isomorfismo ortogonal directo.

Subgrupo de las isometrías directas:

El conjunto de las isometrías directas en un espacio afín euclídeo constituye un subgrupo respecto de la composición que representaremos por $\Theta^+(X)$.

Demostración:

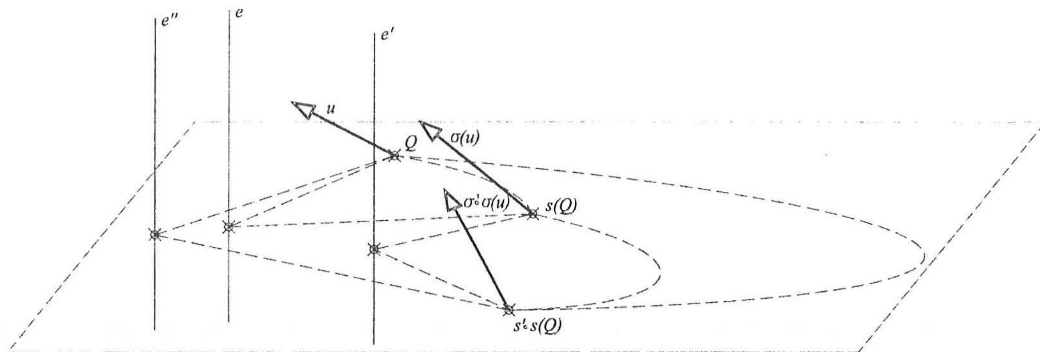
a) La composición de isometrías directas es isometría directa:

   Demostración:

   Sean $(f,\varphi), (g,\psi) \in \Theta^+(X)$, por ser isometrías directas φ y ψ son endomorfismos ortogonales directos y sus matrices asociadas respecto de cualquier base B, al tener como columnas las coordenadas de los vectores transformados de la base mediante la

aplicación lineal, es la matriz de paso de la base B a $\varphi(B)$ y $\psi(B)$ respectivamente y por tanto tienen determinante positivo.
La matriz asociada a la composición $\psi \circ \varphi$ sabemos que es el producto de las matrices asociadas a los endomorfismos factor. Al tener estas determinantes positivos la matriz producto también tiene determinante positivo y $\psi \circ \varphi$ es endomorfismo ortogonal directo, luego $(g \circ f, \psi \circ \varphi) \in \Theta^{+}(X)$, es isometría directa.

Ej.: La composición de dos giros con ejes e *y* e' *paralelos en el espacio afín euclídeo tridimensional será otro giro, con eje* e'' *paralelo a los dados y amplitud la suma de las amplitudes de los giros factor.*



b) Es asociativo.
c) La identidad es isometría directa, $(i, e) \in \Theta^{+}(X)$.
d) Las isometrías directas son inversibles por ser isometrías:
- $\forall (f, \varphi) \in \Theta^{+}(X), \exists (f^{-1}, \varphi^{-1}) \in \Theta^{+}(X) / (f^{-1} \circ f, \varphi^{-1} \circ \varphi) = (f \circ f^{-1}, \varphi \circ \varphi^{-1}) = (i, e)$
- (f^{-1}, φ^{-1}) es isometría directa:

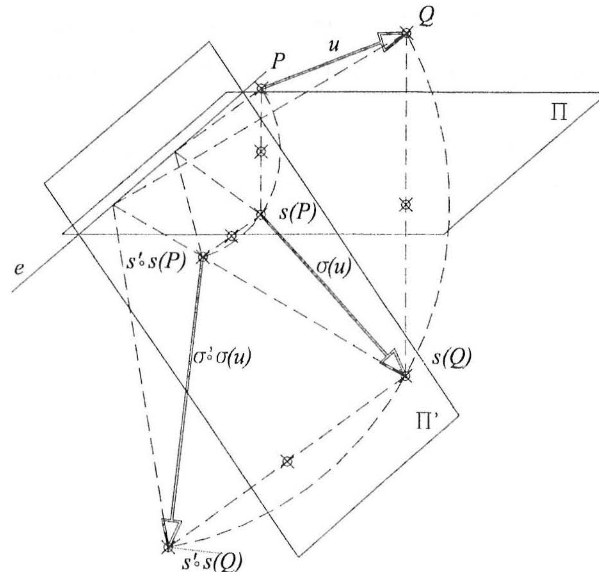
Demostración:

Si $(f.\varphi)$ es isometría directa, φ es un endomorfismo ortogonal directo y dada una base cualquiera B y su transformada mediante φ, $\varphi(B)$, la matriz de paso de B a $\varphi(B)$ tiene determinante positivo. φ^{-1} transforma la base $\varphi(B)$ en la base B y la matriz de paso de $\varphi(B)$ a B es la inversa de la matriz de paso de B a $\varphi(B)$ y por tanto sus determinantes tienen el mismo signo.

- **La composición de dos isometrías inversas es isometría directa:**

$$\forall (f, \varphi), (g, \psi) \in \Theta^{-}(X), (g \circ f, \psi \circ \varphi) \in \Theta^{+}(X)$$

Ej.: La composición de dos simetrías ortogonales en el plano afín ordinario, con planos Π y Π' *concurrentes en una recta* e*, es un giro con eje dicha recta y amplitud el doble del ángulo que forman ambos planos.*

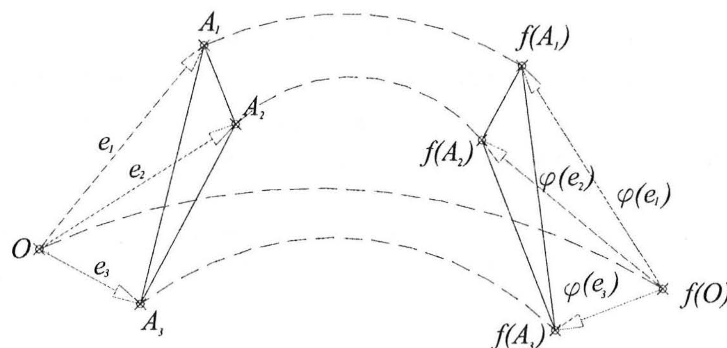


- **Las isometrías inversas $\Theta^{-}(X)$, no constituyen un grupo respecto de la composición.**
- **Las isometrías inversas generan todas las isometrías en un espacio afín euclídeo.**

Determinación de una isometría afín.

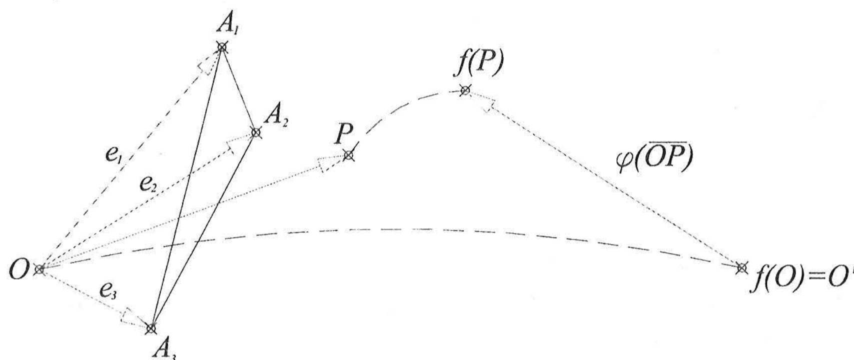
Toda isometría afín es una afinidad, por tanto dada una isometría afín (f,φ) en un espacio afín euclídeo sabemos:

- Transforma, por ser afinidad, una referencia $\Re=\{O,e_1,e_2.....e_n\}$ en otra referencia $\Re'=\{f(O),\varphi(e_1),\varphi(e_2),\varphi(e_3)......\varphi(e_n)\}$.



- Además por ser isometría conserva las distancias, $\|\varphi(e_i)\| = \|e_i\|, \forall i \in (1,2,3....n)$ y los ángulos:
  el ángulo entre e_i y e_j es igual al ángulo entre $\varphi(e_i)$ y $\varphi(e_j), \forall i,j$.

- Dadas dos referencias $\Re = \{O, e_1, e_2.....e_n\}$ y $\Re' = \{O', e_1', e_2'.....e_n'\}$ existe una única afinidad (f,φ) tal que:
$$f(O) = O'$$
y
$$\varphi(e_i) = e_i', \forall i \in \{1,2,3.....n\}$$
- Las dos bases determinan de modo único un isomorfismo φ y se define la biyección entre puntos como:
$$X \xrightarrow{f} X$$
$$P \to f(P) = O' + \varphi(\overline{OP})$$
  es decir: el transformado de un punto P se obtiene como la acción del vector transformado del vector de posición del punto P mediante el isomorfismo φ sobre el origen O'.



- Si además las bases son tales que conservan ángulos entre los vectores y los módulos de los mismos, dicha afinidad es una isometría:
$$\|\varphi(e_i)\| = \|e_i\|, \forall i \in (1,2,3....n) \text{ y}$$
  el ángulo entre e_i y e_j es igual al ángulo entre $\varphi(e_i)$ y $\varphi(e_j), \forall i,j$.

<u>Matriz de un isomorfismo afín:</u>

Sea un espacio afín $A = (X,V)$ y una referencia:
$$\Re = \{O, e_1, e_2, e_3......e_n\}$$
la afinidad (f,φ) queda unívocamente determinada si se conocen los transformados de los elementos de dicha referencia, es decir:

$f(O)$ de coordenadas $(a_1, a_2, a_3 .... a_n)$

y

$$\varphi(e_i) = \sum a_{ij} e_j \quad \forall i \in \{1,2,3.......n\}$$

El vector de posición de $f(O)$ es: $\overline{Of(O)} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$

La afinidad viene definida por: $\forall P \in X, f(P) = f(O) + \varphi(\overline{OP})$,

y sus ecuaciones serán: $y_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \forall i \in \{1,2,3,...n\}$ matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}; Y = B + AX$$

ó bien:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ \hline a_1 & a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n & a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}; Y = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline B & A \end{array}\right) X$$

- Como φ es un endomorfismo ortogonal, la matriz A respecto de una referencia ortonormal es ortogonal: $A^t = A^{-1}$.
- El determinante de la matriz es: $|A| = 1$ ó $|A| = -1$.
- **No todas las afinidades cuya matriz asociada tenga determinante $|A| = 1$ ó $|A| = -1$ son isometrías.**
- Las matrices de esta forma forman un grupo llamado grupo ortogonal n-dimensional de K, se representa por: $O_n(K)$.
- Cada referencia $\Re$ induce un isomorfismo $\Theta(X) \rightarrow O_n(K)$ que asocia a cada isometría la matriz de bloques que la caracteriza en dicha referencia.

Cambio de referencia:

Sea la referencia $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3 ...... e_n\}$ y una isometría (f, φ) que tiene como expresión matricial respecto de dicha referencia:

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline P & A \end{array}\right) X \text{ o bien}: Y = P + AX$$

Dada otra referencia $\Re'=\{O',e_1',e_2',e_3'.....e_n'\}$, la isometría (f,φ) tendrá respecto de $\Re'$ otra expresión matricial:

$$Y'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P' & A' \end{pmatrix}X' \text{ o bien}: Y'=P'+A'X'.$$

Existe una afinidad $(g,\sigma)\in G(A)$, automorfismo interior, que transforma la referencia $\Re$ en la referencia $\Re'$ cuyas ecuaciones son:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q & B \end{pmatrix}X' \text{ o bien}: X=Q+BX'$$

y

$$Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q & B \end{pmatrix}Y' \text{ o bien}: Y=Q+BY'$$

y que relacionan las coordenadas de los puntos respecto de ambas referencias (ecuaciones de cambio de referencia).
La relación entre las dos ecuaciones de (f,φ), al ser todas afinidades será:

$$P'=B^{-1}(P+(A-I)Q)$$

y

$$A'=B^{-1}AB$$

y la expresion matricial:

$$Y'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^{-1}(P+(A-I)Q) & B^{-1}AB \end{pmatrix}X'$$

- Se puede establecer una relación de equivalencia que agrupa en cada clase todas las isometrías que solo se diferencian en un cambio de referencia, es decir que son esencialmente las mismas.
- Si las dos referencias son ortonormales las matrices asociadas a la isometría son ortogonales y si además el automorfismo interior es isometría, la matriz de cambio también es ortogonal.

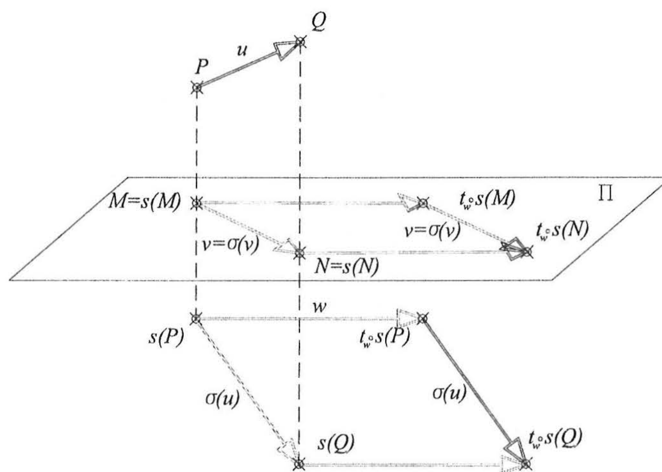
Invariantes.

Puntos invariantes:

- Sea (f,φ) un isomorfismo afín, se dice que un punto $P\in A$ es invariante si coincide con su transformado mediante el isomorfismo: $f(P)=P$.
- El sistema $(A-I)X=-B$ constituye las ecuaciones cartesianas del conjunto de puntos invariantes, si es incompatible no tiene puntos fijos.
- El conjunto de puntos invariantes es un subespacio afín con variedad de dirección $V(1)$ (subespacio propio asociado al autovalor $\lambda=1$), es decir:
- $E=V(1)=\{P\in A / f(P)=P\}$
- Al subespacio E invariante de una isometría se le llama eje de la isometría.

- **No todo autovalor $\lambda = 1$ corresponde a un subespacio de puntos invariantes.**

Como ejemplo: si componemos una simetría y una traslación de vector paralelo al plano de la simetría, obtenemos una nueva isometría, que llamamos simetría con deslizamiento, no conserva ningún punto invariante pero la orientación del plano de simetría es una dirección invariante y corresponde a un subespacio propio asociado aun autovalor $\lambda = 1$.



<u>**Direcciones invariantes:**</u>

- Si una recta $r = P + L(u)$, se transforma, $f(r)$en otra $f(r) = f(P) + L\varphi(u)$ y son paralelas, es decir se verifica: $\varphi(u) = \lambda u$ se dice que la dirección de la recta es invariante mediante la isometría.
- Las direcciones invariantes son los subespacios propios asociados al isomorfismo de la isometría.
- Al ser un endomorfismo ortogonal, los autovalores si son reales tienen que ser $\lambda = 1$ ó $\lambda = -1$.
- Si un subespacio vectorial L es invariante mediante una aplicación lineal ortogonal φ, su complemento ortogonal también es invariante mediante la aplicación φ, es decir:

$$\text{Si } \varphi(L) = L \Rightarrow \varphi(L^{\perp}) = L^{\perp}.$$

Demostración:

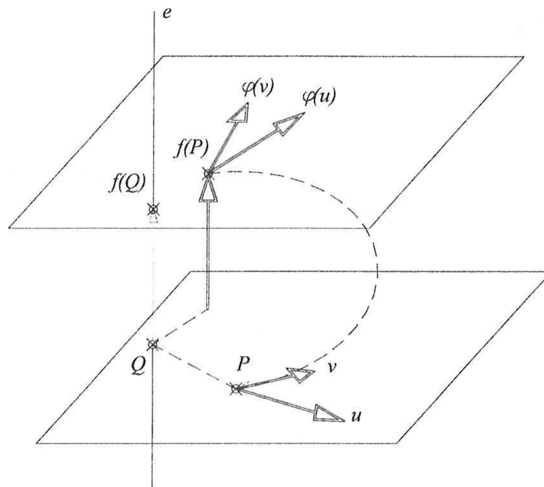
$$\left.\begin{array}{r}\text{Si } \varphi \text{ es ortogonal}: \langle u, v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle \\ v \in L^{\perp} \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0, \forall u \in L\end{array}\right\} \Rightarrow \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = 0, \forall u \in L \Leftrightarrow \varphi(v) \in (\varphi(L))^{\perp} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi(L^{\perp}) = (\varphi(L))^{\perp}$$

como φ es isomorfismo y $\varphi(L) = L$, al ser el complemento ortogonal único: $\varphi(L^{\perp}) = L^{\perp}$.

- El complemento ortogonal es invariante pero sus vectores no tienen por que serlo, una base de $L^{\perp}$, $\{e_1, e_2 .... e_n\}$, se transforma en otra $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), ... \varphi(e_n)\}$ compuesta por vectores diferentes pero que engendra el mismo espacio vectorial.

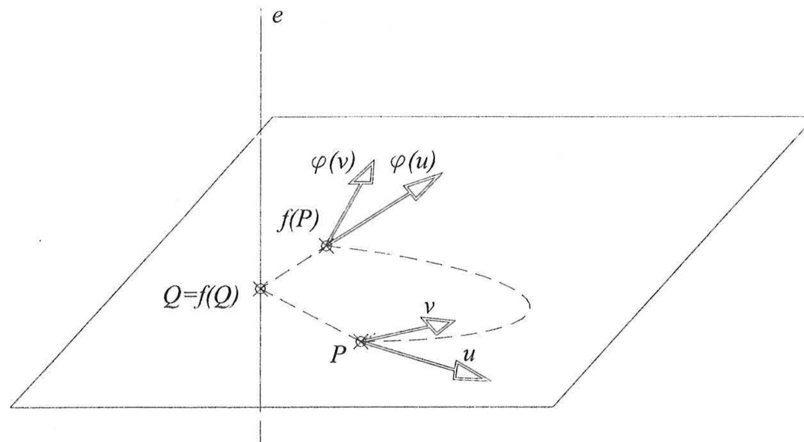
Como ejemplo veamos un movimiento helicoidal en el espacio afín euclídeo tridimensional ordinario; los planos perpendiculares al eje del giro, que no es de puntos invariantes, se transforman en planos paralelos; los vectores $u, v...$ del plano se transforman en otros vectores diferentes $\varphi(u), \phi(v),...$ que engendran el mismo plano vectorial, es decir la misma variedad lineal.



Corolario:

- Los subespacios afines ortogonales a subespacios de puntos fijos mediante una isometría mantienen la variedad de dirección; como estos subespacios afines cortan al subespacio de puntos invariantes en un punto, son subespacios dobles pero no de puntos dobles.

Como ejemplo un giro en el espacio afín euclídeo ordinario. Los planos perpendiculares al eje de giro son dobles pero no de puntos dobles. Sólo tiene un punto doble, el de corte con el eje.



TRASLACIONES

Definición:

En un espacio afín euclídeo $A=(X,V)$, sea un vector $u \in V$, se llama traslación de vector u a la correspondencia:

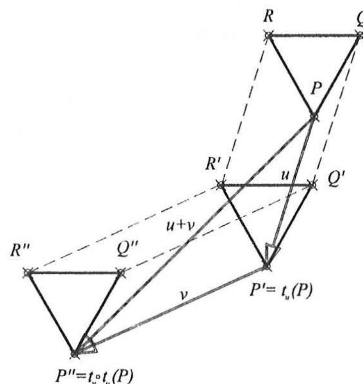
$$X \xrightarrow{t_u} X$$
$$P \to t_u(P) = P'$$
$$\text{tal que :}$$
$$t_u(P) = P + u$$

- Al conjunto de las traslaciones en un espacio afín euclídeo le llamamos:
$$\mathrm{T}(A) = \{t_u / u \in V\}.$$

Propiedades:

1) Por la definición de acción de un vector sobre un punto, se verifica:
$$\forall P,Q \in X, \exists! u \in V / t_u(P) = Q.$$
2) Es una biyección.
3) Como consecuencia de las anteriores:
$$\text{Si } \exists P \in X / t_u(P) = t_v(P) \Leftrightarrow u = v, \forall u,v \in V.$$
4) La transformación vectorial asociada es la identidad.
5) Conserva las distancias:
$$\text{por ser el endomorfismo asociado la identidad} : \overline{t_u(P)t_u(Q)} = \overline{PQ} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d(t_u(P), t_u(Q)) = d(P,Q)$$

- **La composición de traslaciones es un grupo abeliano:**



Ecuaciones:

Sea un espacio afín $A = (X,V)$, una referencia $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3 ...... e_n\}$ y una traslación t_u:

$$\left.\begin{array}{r}\text{por definición}: t_u(P) = P + u \\ \text{refiriendo al origen } O\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{Ot_u(P)} = \overline{OP} + u$$

$$\text{refiriendo a la base del espacio vectorial}: \left\{\begin{array}{l}\overline{OP} = \sum_1^n x_i e_i \\ \overline{Ot_u(P)} = \sum_1^n y_i e_i \\ u = \sum_1^n u_i e_i\end{array}\right. \Rightarrow \sum_1^n y_i e_i = \sum_1^n x_i e_i + \sum_1^n u_i e_i$$

matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ \hline u_1 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ u_2 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ u_n & 0 & 0 & . & . & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}; Y = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline U & I \end{array}\right)$$

ISOMETRIAS EN EL PLANO

Toda isometría en el plano se podrá obtener como la composición de dos o tres simetrías axiales.

Hemos visto que la composición de dos isometrías inversas es una isometría directa y que las isometrías directas constituyen un grupo respecto de la composición.

Vamos a empezar este capitulo definiendo la simetría ortogonal respecto de una recta (isometría que mantiene una recta invariante), para después, mediante composiciones de dos simetrías axiales con distintas posiciones relativas entre los ejes obtener las isometrías directas y por último estudiar la composición de los distintos tipos de isometrías.

El orden será similar al utilizado en la descripción de las afinidades en el plano, es decir: 1.- Isometrías que mantienen una recta invariante. 2.- Isometrías sin puntos invariantes. 3.- Isometrías con un punto invariante.

Para terminar veremos todos los tipos de matrices ortogonales en el plano y la isometría que representan.

Isometrías que mantienen una recta de puntos invariantes:

Si tienen una recta de puntos invariantes para obtener las ecuaciones reducidas tomamos como referencia, $\mathfrak{R} = \{O, e_1, e_2\}$, siendo: O un punto invariante del eje, e_1 un vector con la dirección del eje y e_2 un vector ortogonal al anterior.

El vector e_1, al estar sobre el eje queda invariante mediante la aplicación lineal asociada, es decir: $\varphi(e_1) = e_1$, el complemento ortogonal de un subespacio invariante mediante una aplicación lineal también es invariante mediante la aplicación y al ser ortogonal los autovalores sólo pueden tomar los valores 1 ó -1, por tanto la matriz A tendrá la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ó } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, al ser el origen invariante la matriz de la afinidad resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

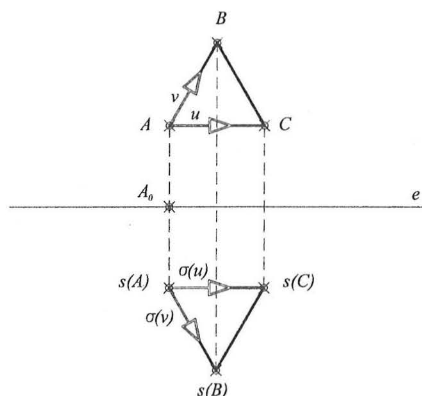
En el primer caso sería la identidad.

Simetría ortogonal:

Definición:

Se llama simetría de eje e a una transformación en la que el todo segmento cuyos extremos son un punto A y su transformado $f(A)$, tiene como mediatriz el eje e. Es decir es una simetría afín (oblicua) con la dirección normal al eje: el punto medio A_0 del segmento de extremos A y $f(A)$ está sobre el eje y la recta $\overline{Af(A)}$ es normal al plano.

Se representa por s_e.



De la definición se deduce:

- La única recta doble de puntos dobles es el eje, es decir sólo admite una recta de puntos invariantes.
- Las rectas perpendiculares al eje son dobles pero no de puntos dobles, luego la dirección normal al eje es invariante.
- Tiene dos direcciones invariantes, una la del eje que corresponde a un autovalor $\lambda_1 = 1$ y otra la normal al eje con autovalor $\lambda_2 = -1$.

Propiedades:

1.- Las rectas paralelas al eje se transforman en rectas paralelas al eje.

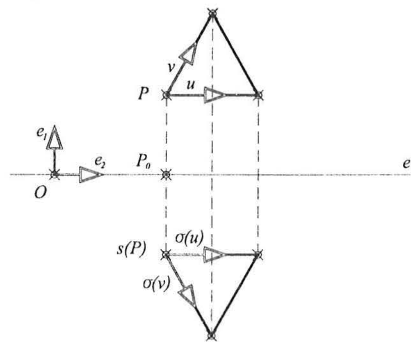
2.- Las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas.

3.- Las rectas perpendiculares al eje se transforman en sí mismas, son rectas dobles pero no de puntos dobles.

Ecuaciones reducidas:

Si tomamos como sistema de referencia $\{O, e_1, e_2\}$ el compuesto por:

e_1, un vector unitario con la dirección del eje e, e_2 un vector unitario perpendicular al eje y O un punto cualquiera del mismo



y llamamos a las coordenadas de un punto genérico P y su transformado $s(P)$ respecto de dicha referencia $P=(x,y)$ y $f(P)=(x',y')$ respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{por definición}: \overline{P_0 s(P)} = -\overline{P_0 P} \\ \text{como}: \begin{cases} \overline{P_0 s(P)} = y' \\ \text{y} \\ \overline{P_0 P} = y \end{cases} \end{array}\right\} \Leftrightarrow y' = -y$$

$$\text{Ademas se verifica}: x' = x$$

Luego las ecuaciones de la simetría s_e respecto de la referencia $\{O, e_1, e_2\}$ anteriormente definida serán:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Y la expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

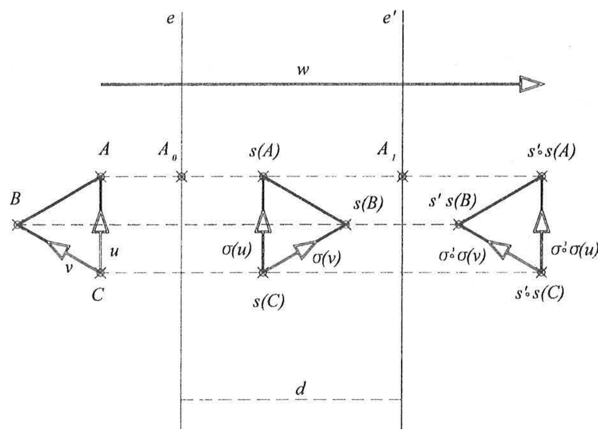
Afinidades sin puntos invariantes:

Sabemos que la **traslación** es una isometría que no mantiene ningún punto invariante, conocemos su comportamiento y sus ecuaciones que respecto de una referencia ortonormal $\Re = \{O, e_1, e_2\}$ en la que e_1 tiene la dirección del vector de la traslación, tienen como matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $e = |u|$, siendo u el vector de la traslación.

- **Toda traslación se puede obtener componiendo dos simetrías de ejes paralelos:**
  Si componemos dos simetrías s_e y $s_{e'}$, de ejes paralelos la composición es una traslación t_w de vector w, perpendicular a los ejes de las simetrías y con módulo igual al doble de la distancia entre ambos ejes, $|w| = 2d$.



Dos simetrías de ejes paralelos tienen la misma aplicación lineal asociada, una simetría vectorial; las simetrías vectoriales son coincidentes con su aplicación inversa y la composición resultará la identidad, sabemos que toda aplicación afín que lleva asociada como aplicación lineal la identidad es una traslación y por tanto la composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación.

Por otra parte, por definición de simetría se verifica para todo punto A:

$$\left.\begin{aligned} & d(A, A_0) = d(A_0, s(A)) \\ & d(s(A), A_1) = d(A_1, s' \circ s(A)) \\ & d(A, s' \circ s(A)) = d(A, A_0) + d(A_0, s(A)) + d(s(A), A_1) + d(A_1, s' \circ s(A)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A, s' \circ s(A)) = 2d(A_0, s(A)) + sd(s(A), A_1) \Rightarrow d(A, s' \circ s(A)) = 2d(A_0, A_1)$$

Y el vector de la traslación w, es perpendicular a los ejes de las simetrías y con módulo igual al doble de la distancia entre ambos ejes, $|w| = 2d$.

- La composición es conmutativa.
- La descomposición de una traslación de vector w en dos simetrías no es única, la composición de cualquier par de simetrías de ejes paralelos y que disten entre si la mitad del módulo del vector de la traslación $d = \frac{|w|}{2}$, nos da como resultado dicha traslación.

Composición de simetría y traslación, simetrías con deslizamiento.

La aplicación lineal asociada a una traslación es la identidad, por ello, si componemos una traslación y una isometría que mantiene un eje invariante (simetría), la aplicación lineal asociada a la composición no varia.

Pero dependiendo de la posición relativa entre el vector de la traslación y el eje de la simetría obtendremos resultados diferentes:

1.- Isometrías con un eje invariante del mismo tipo.

2.- Un nuevo tipo de isometría sin puntos invariantes distinta de la traslación, que llamaremos **simetría con deslizamiento**.

Para obtener las ecuaciones reducidas de las simetrías con deslizamiento vamos a tomar una referencia $\Re = \{O, e_1, e_2\}$, siendo (como en el caso anterior isometrías que mantienen una recta de puntos invariantes) O un punto cualquiera del eje de la simetría factor, e_1 un vector unitario con la dirección del eje de dicha simetría y e_2 un vector unitario y perpendicular con el anterior, en estas condiciones la matriz A tendrá la misma forma que en las simetrías:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

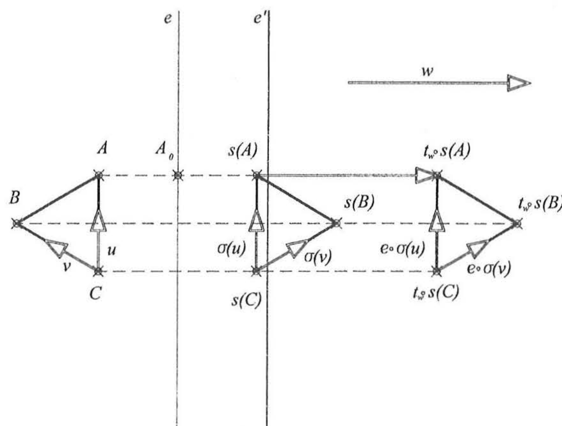
Es lógico puesto que las simetrías con deslizamiento tienen la misma aplicación lineal asociada que las simetrías.

Al no haber puntos fijos, el origen no es invariante y por tanto $P \neq 0$ y la matriz de la simetría con deslizamiento resulta ser:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline e & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

1.- La composición de una simetría de eje e, s_e y una traslación de vector w perpendicular al la eje t_w, es otra simetría de eje e', paralelo a e, $s_{e'}$.

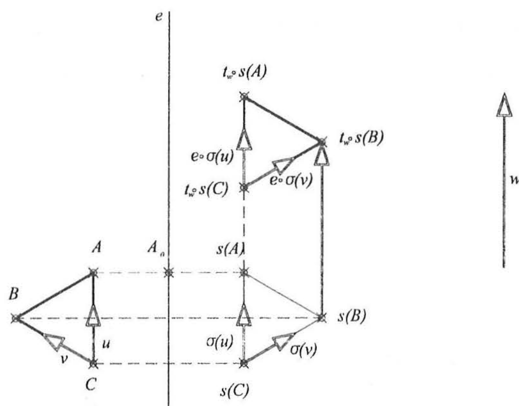
La traslación se puede descomponer en dos simetrías de ejes paralelos. Si hacemos la descomposición de modo tal que una de las simetrías tenga el eje coincidente con la dada, al ser la identidad la composición de una simetría con ella misma, nos queda únicamente la simetría de eje paralelo a la anterior y a una distancia igual a la mitad del módulo del vector de la traslación.



2.- Simetría con deslizamiento.

Definición:

Se llama simetría con deslizamiento a la composición de una simetría de eje e, s_e con una traslación t_w de vector w paralelo al eje e de la simetría.



De la definición se deduce, dado que las traslaciones mantienen todas las direcciones invariantes y ningún punto doble, que:

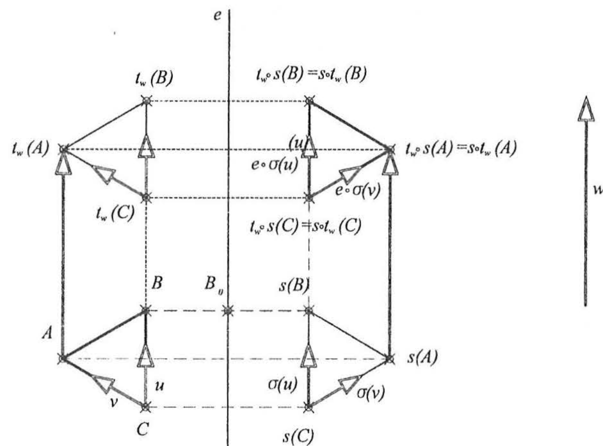
- No tiene puntos invariantes.
- Tiene una recta doble pero no de puntos dobles: el eje de la simetría.

- Las rectas paralelas al eje se transforman en rectas paralelas al eje, por ello la dirección del mismo es invariante y corresponde a un autovalor $\lambda_1 = 1$.
- Las rectas perpendiculares al eje, se transforman en rectas perpendiculares al eje, tienen una dirección invariante con autovalor $\lambda_2 = -1$.
- Las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas.

La composición es conmutativa:

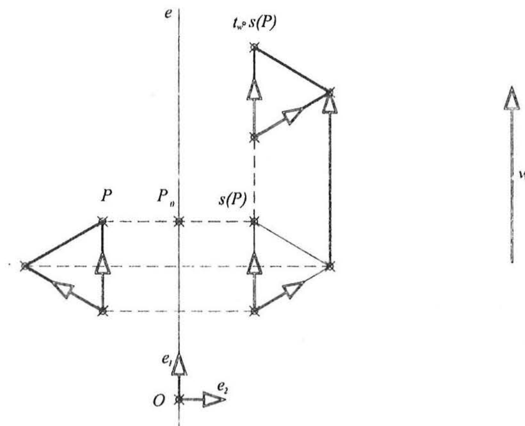
Al ser $A, t_w(A), s(A), t_w(s(A))$ un paralelogramo se verifica:

$$s \circ t_u = t_u \circ s .$$



Ecuaciones reducidas:

Si tomamos como sistema de referencia $\{O, e_1, e_2\}$ el compuesto por:
e_1 un vector unitario con la dirección del eje e, e_2 un vector unitario perpendicular al eje y O un punto cualquiera del mismo



y llamamos a las coordenadas de un punto genérico P y su transformado $t_w \circ s(P)$ respecto de dicha referencia $P = (x, y)$ y $t_w \circ s(P) = (x', y')$ respectivamente:
el vector de la traslación tiene por coordenadas: $w = (a,0)$, resulta:

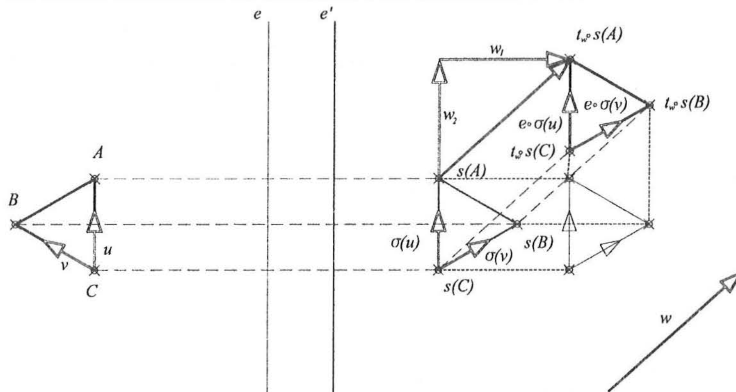
$$\left.\begin{array}{l} \text{por la traslación } x' = x + a \\ y \\ \text{por la simetría} \quad y' = -y \end{array}\right\}$$

La expresión matricial es:

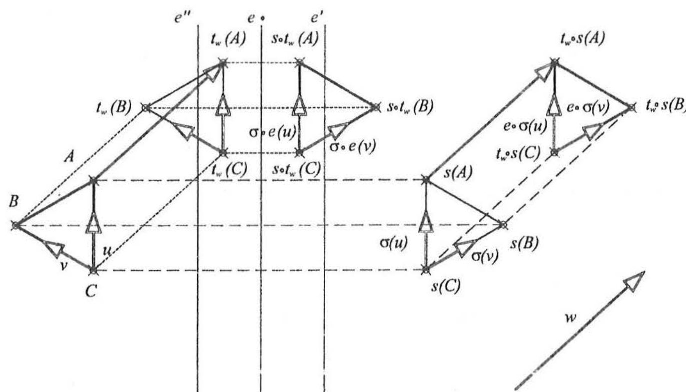
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

3.- La composición de una simetría s_e con una traslación t_w de vector w no perpendicular al eje de la simetría, es un simetría con deslizamiento de eje e', paralelo al eje e de la simetría.

Si descomponemos el vector de la traslación en dos, uno con la dirección del eje y otro perpendicular al mismo, la composición del vector perpendicular al eje con la simetría resulta otra simetría con eje paralelo y la composición de ésta con el vector paralelo al eje nos da como resultado la simetría con deslizamiento.

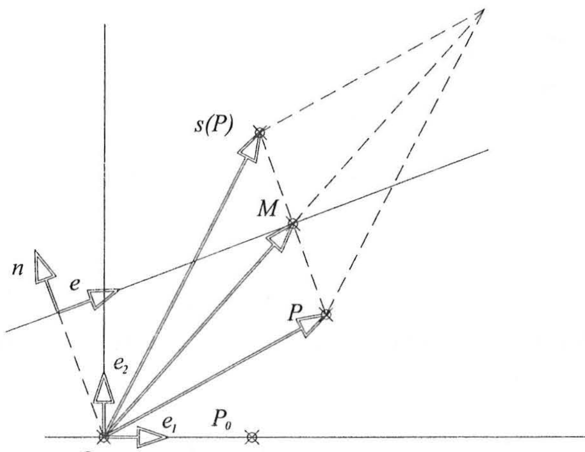


La composición no es conmutativa:



Ecuaciones de simetrías y simetrías con deslizamiento:

Si tomamos una referencia ortonormal $\{O, e_1, e_2\}$ cualquiera y referimos al origen:



$$\left.\begin{array}{l}\overline{OM}=\frac{1}{2}\left(\overline{OP}+\overline{OP'}\right)\\ \text{como: } M\in e\Leftrightarrow \overline{OM}=\overline{OA}+\lambda v\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\overline{OP}+\overline{OP'}\right)=\overline{OA}+\lambda v\Leftrightarrow \overline{OP'}=2\overline{OA}+2\lambda v-\overline{OP}$$

$$\text{Por otra parte: } \overline{PP'}\perp e\Leftrightarrow \left\langle\left(\overline{OP'}-\overline{OP}\right),n\right\rangle=0\Leftrightarrow \left\langle\overline{OP'},n\right\rangle=\left\langle\overline{OP},n\right\rangle \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\left\langle\overline{OP'},n\right\rangle=\left\langle\left(2\overline{OA}+2\lambda v-\overline{OP}\right),n\right\rangle\\ \text{como: } \overline{OA}\perp v\Leftrightarrow\left\langle\overline{OA},v\right\rangle=0\\ \text{y } \|\overline{v}\|=1\Leftrightarrow\langle v,v\rangle=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\langle\overline{OP'},v\right\rangle=2\lambda-\left\langle\overline{OP},v\right\rangle\\ \text{sabemos que: } \left\langle\overline{OP'},n\right\rangle=\left\langle\overline{OP},n\right\rangle\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda=\left\langle\overline{OP},v\right\rangle$$

La ecuación vectorial será: $\overline{OP'}=2\overline{OA}+2\left\langle\overline{OP},v\right\rangle v-\overline{OP}$.

Si llamamos a las coordenadas de un punto genérico P y su transformado $s(P)$ respecto de dicha referencia $P=(x,y)$ y $s(P)=(x',y')$ respectivamente, α al ángulo que forma el eje e de la simetría con el eje OX tenemos:

$$v=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$$

$$\text{llamando } d=\left\|\overline{OA}\right\|, n=(d\operatorname{sen}\alpha,-d\cos\alpha)$$

y resulta:

$$\left.\begin{array}{l}x'=2d\operatorname{sen}\alpha+2(x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha-x\\ y'=-2d\cos\alpha+2(x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\alpha-y\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = 2d \operatorname{sen}\alpha + 2x\cos^2\alpha + 2y\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - x\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right) \\ y' = -2d\cos\alpha + 2x\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 2y\operatorname{sen}^2\alpha - y\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = 2d\operatorname{sen}\alpha + x\cos 2\alpha + y\operatorname{sen}2\alpha \\ y' = -2d\cos\alpha + x\operatorname{sen}2\alpha - y\cos 2\alpha \end{array}\right.$$

y su expresión matricial será:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2d\operatorname{sen}\alpha & \cos 2\alpha & \operatorname{sen}2\alpha \\ -2d\cos\alpha & \operatorname{sen}2\alpha & -\cos 2\alpha \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Si componemos con una traslación de vector w paralelo al eje se simetría, sus coordenadas serán:

$$\text{llamando a}: \|w\| = b,\ w = (b\cos\alpha, b\operatorname{sen}\alpha)$$

y las ecuaciones de una simetría con deslizamiento quedarán:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2d\operatorname{sen}\alpha + b\cos\alpha & \cos 2\alpha & \operatorname{sen}2\alpha \\ -2d\cos\alpha + b\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}2\alpha & -\cos 2\alpha \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Isometrías que mantienen un punto invariante:

En la referencia ortonormal $\Re = \{O, e_1, e_2\}$, que utilizaremos para obtener las ecuaciones reducidas tomaremos como origen el punto fijo de la isometría, como O es invariante la matriz será de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Giro:

Definición:

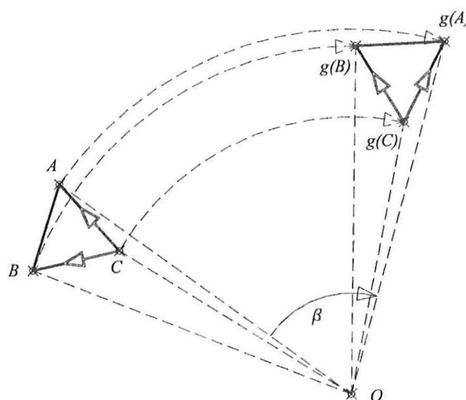
Se llama giro de centro C y amplitud θ, siendo θ un ángulo orientado, a una aplicación que asocia a cada punto A del plano otro punto $f(A)$ de modo que se verifica:

$$d(O,A) = d(O, f(A))$$

y

el ángulo entre $\overline{OA}$ y $\overline{Of(A)}$ es igual que θ

Se representa por $g_{C,\theta}$.



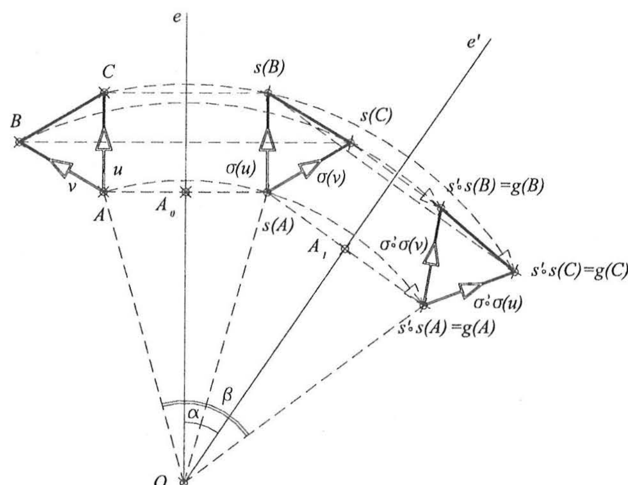
- Si $\theta = \pi$, se le llama simetría central.

De la definición se deduce:

- El único punto doble es el centro de giro.
- No hay rectas dobles salvo en las simetrías centrales en las que todas las rectas que pasan por el centro son dobles pero no de puntos dobles, son direcciones que corresponden a autovalores $\lambda = -1$.

- **La composición de dos simetrías con ejes incidentes en un punto es un giro.**

1.- La composición de dos simetrías s_e y $s_{e'}$,con ejes que se cortan, es un giro con centro O en el punto de corte de ambos ejes y amplitud el doble del ángulo que forman los ejes de las simetrías factor.



Los dos ejes se cortan en un punto O que es invariante por las dos simetrías y por tanto, por la composición de ambas, para todo punto A se verifica:

$$d(A,A_0)=d(A_0,s(A))\Rightarrow\begin{cases}áng(AOA_0)=áng(A_0Os(A))\\d(O,A)=d(O,s(A))\end{cases}$$

$$d(s(A),A_1)=d(A_1,s'\circ s(A))\Rightarrow\begin{cases}áng(s(A)OA_1)=áng(A_1Os'\circ s(A))\\d(O,s(A))=d(O,s'\circ s(A))\end{cases}$$

de lo anterior e deduce:

1.- $d(O,A)=d(O,s'\circ s(A))$

2.- $$\left.\begin{array}{l}áng(AOs'\circ s(A))=áng(AOA_0)+áng(A_0Os(A))+áng(s(A)OA_1)+áng(A_1Os'\circ s(A))\\áng(AOA_0)=áng(A_0Os(A))\\áng(s(A)OA_1)=áng(A_1Os'\circ s(A))\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$áng(AOs'\circ s(A))=2áng(A_0OA_1)$$

Luego la composición es un giro.

- La descomposición de un giro en el producto de dos simetrías no es única, cualquier par de simetrías cuyos ejes se corten en el centro de giro y formen un ángulo entre sí igual a la mitad de la amplitud del giro dan como resultado en la composición dicho giro.

Ecuaciones reducidas de la simetría central:

Si tomamos como sistema de referencia $\{O,e_1,e_2\}$, siendo O el centro de giro, y e_1,e_2 dos vectores arbitrarios unitarios y ortogonales, llamamos a las coordenadas de un

punto genérico P y de su transformado $g(P)$ respecto de dicha referencia $P=(x,y)$ y $g(P)=(x',y')$, tendremos:

$$\left.\begin{array}{r}\text{por definición :}\\ \overline{OP}=-\overline{Og(P)}\\ \text{ángulo de } P_0OP=\text{ángulo de } g(P_0)Og(P)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\overline{P_0P}=-\overline{g(P_0)g(P)}\\ \overline{P_0P}=y \text{ y } \overline{g(P_0)g(P)}=y'\end{array}\right\}\Rightarrow y'=-y$$

Además.

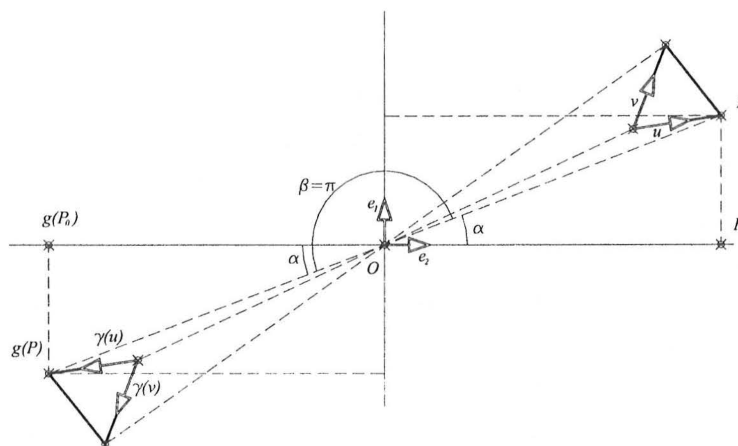
$$\left.\begin{array}{r}\overline{OP_0}=-\overline{g(O)g(P_0)}\\ \overline{OP}=x \text{ y } \overline{g(O)g(P_0)}=x'\end{array}\right\}\Rightarrow x'=x$$

Luego las ecuaciones de la simetría central g respecto de la referencia $\{O,e_1,e_2\}$ son:

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=y\end{cases}$$

Y su expresión matricial:

$$\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ x'\\ y'\end{pmatrix}$$



Composición de giros:

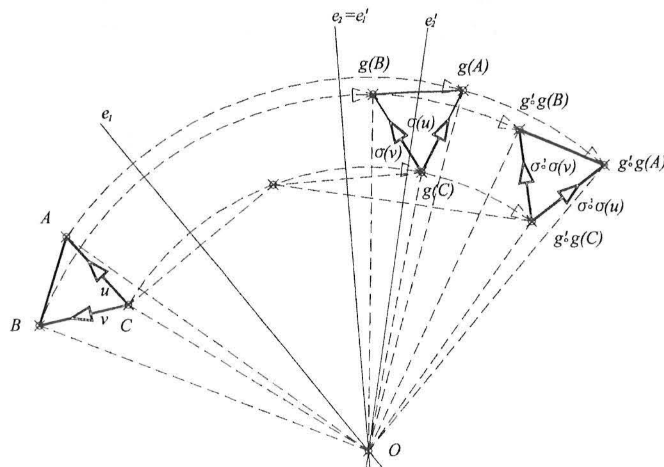
Distinguimos dos casos:

1.- Giros con el mismo centro:

- **Composición de giros concéntricos:**

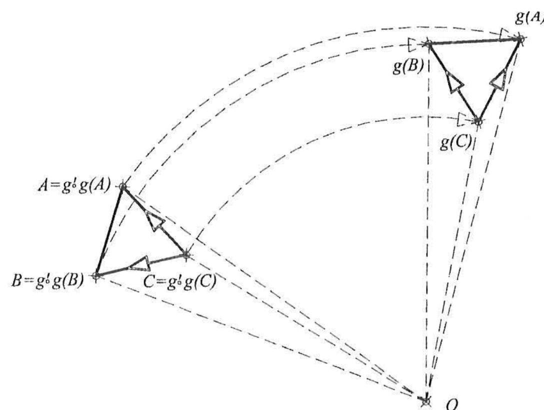
La composición de dos giros concéntricos es otro giro con el mismo centro y amplitud la suma de las amplitudes de los giros factor:

Si descomponemos los giros en dos simetrías de modo tal que la segunda simetría del primer giro coincida con la primera del segundo, el giro resultante será el resultante de la composición de la primera simetría del primer giro con la segunda del segundo giro al ser la identidad la composición de los otros dos que son coincidentes.

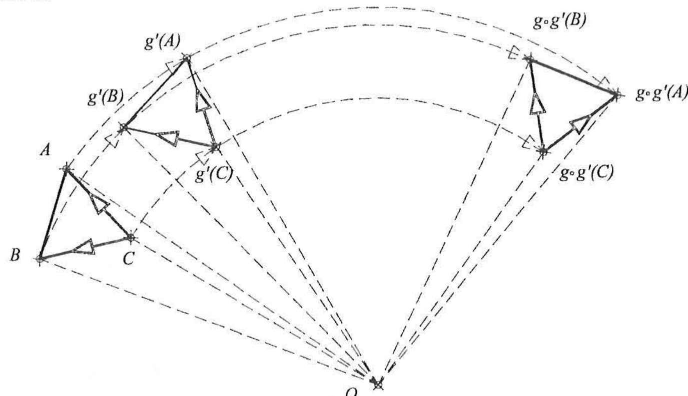


La composición de giros concéntricos es un grupo abeliano:

- El elemento neutro será un giro de $0°$.
- El elemento simétrico de un giro con amplitud θ es otro giro con amplitud $2\pi - \theta$:
-



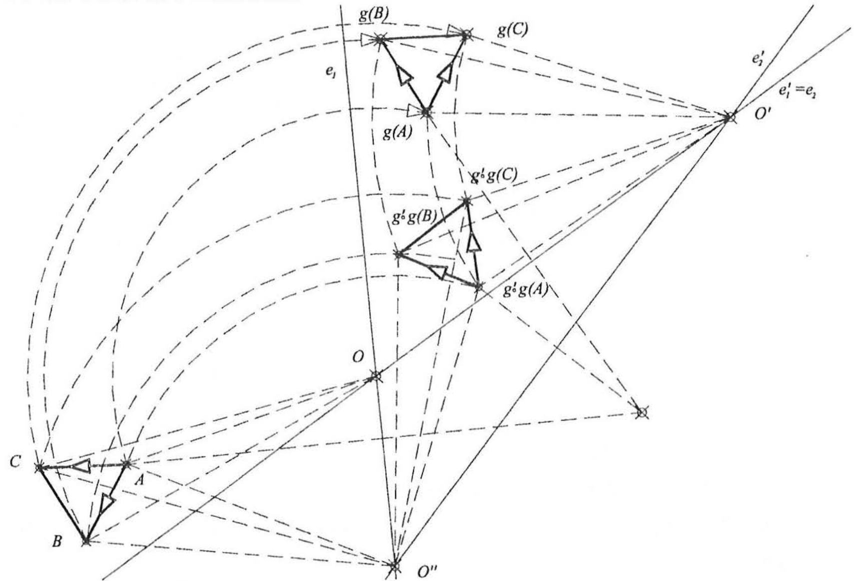
- Es conmutativo.



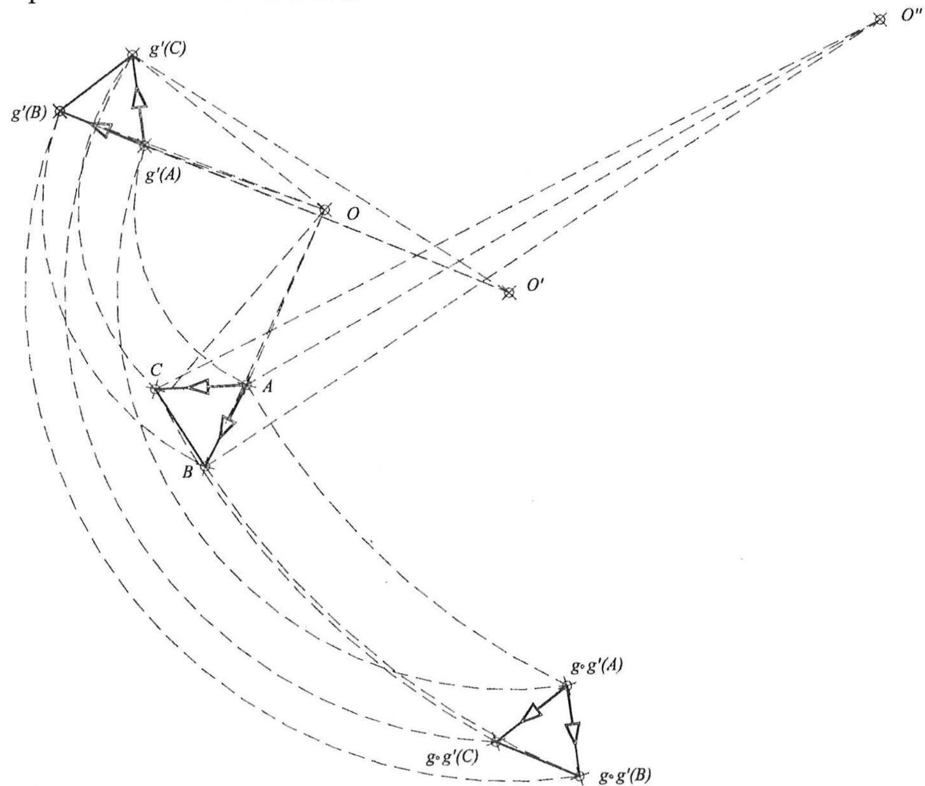
2.- Composición de giros con distinto centro.

- La composición de dos giros con distinto centro es un giro o una traslación:

- Si la suma de las amplitudes es diferente de 2π , es un giro:
  Podemos descomponer los giros de modo tal que en ambos intervenga una simetría con el eje que contenga a los dos centros de giro. El giro resultante será la composición de las otras dos simetrías.

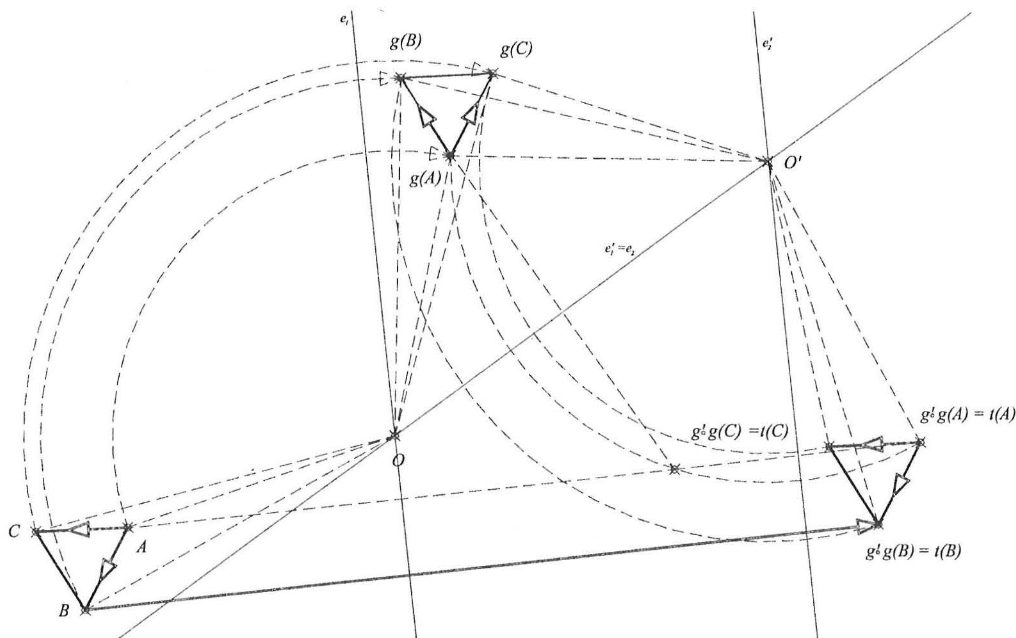


La composición no es conmutativa:



Se mantiene la amplitud pero cambia el centro al componerlos en diferente orden.

- Si la suma de las amplitudes es 2π , la composición es una traslación: Haciendo la descomposición como en el caso anterior, en ambos giros con una simetría que contenga a los dos centros, las otras dos simetrías resultarán con ejes paralelos y por tanto su composición será una traslación.



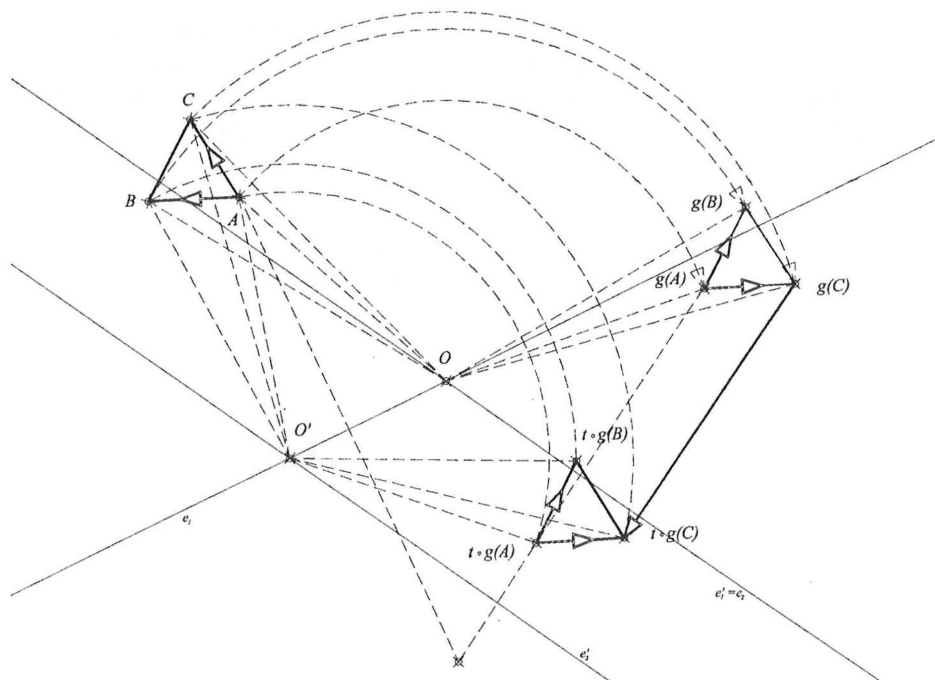
Luego la composición de giros con distinto centro no es una operación interna.

Las traslaciones y los giros son un grupo no abeliano respecto de la composición:

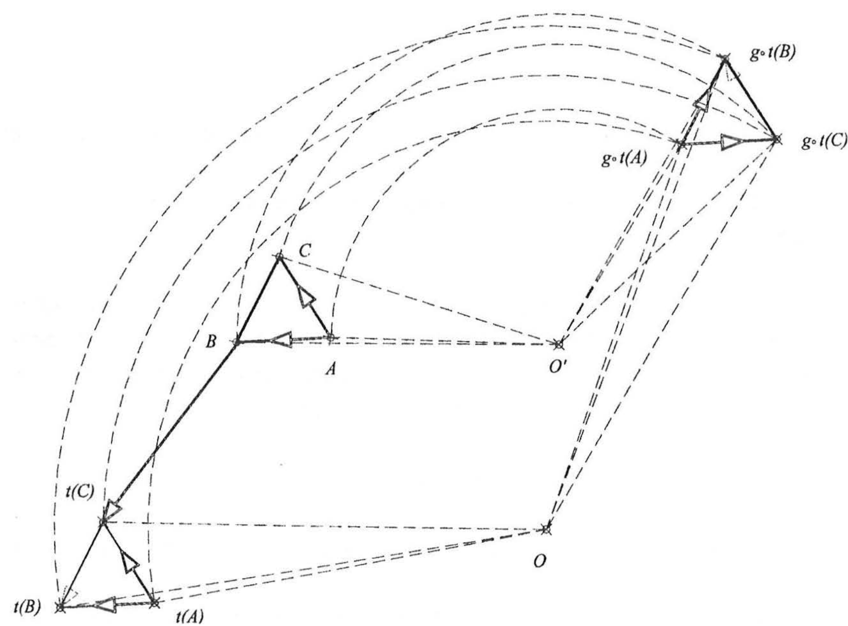
No podemos hablar de estructura con la composición de giros de distinto centro pero si consideramos las composiciones de las isometrías directas, es decir giros y simetrías, la operación es cerrada: la composición e traslaciones resulta una traslación, la de giros un giro o una traslación y la de giro y traslación un giro.

- **Composición de giro y traslación.**

  La composición de un giro y una traslación es otro giro con la misma amplitud y diferente centro:
  la descomposición del giro, en este caso se hará con un eje de simetría perpendicular al vector de traslación y la traslación se descompondrá en una simetría que tenga un eje pasando por el centro de giro, que coincidirá con la anterior, por tanto el giro resultante será la composición de las otras dos simetrías.

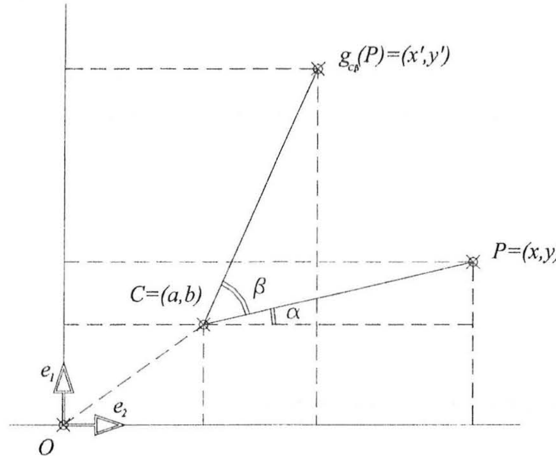


La composición no es conmutativa.



Ecuaciones:

Si tomamos como sistema de referencia ortonormal $\{O, e_1, e_2\}$ y llamamos a las coordenadas respecto de dicha referencia de un punto genérico P y de su transformado mediante un giro con centro en el punto C y amplitud el ángulo β , $g_{C,\beta}(P)$:
$P=(x,y)$ y $g_{C,\beta}(P)=(x',y')$ respectivamente, siendo las coordenadas del centro $C=(a,b)$,



tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x-a=\left|\overline{CP}\right|\cos\alpha \Leftrightarrow \left|\overline{CP}\right|=\dfrac{x-a}{\cos\alpha} \\ y-b=\left|\overline{CP}\right|\operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow \left|\overline{CP}\right|=\dfrac{y-b}{\operatorname{sen}\alpha} \\ x'-a=\left|\overline{CP'}\right|\cos(\alpha+\beta) \Leftrightarrow \left|\overline{CP'}\right|=\dfrac{x'-a}{\cos(\alpha+\beta)} \\ y'-b=\left|\overline{CP'}\right|\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \Leftrightarrow \left|\overline{CP'}\right|=\dfrac{y'-b}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \end{array}\right\}$$

como se mantienen las distancias: $\left|\overline{CP}\right|=\left|\overline{CP'}\right|$ y resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\cos\alpha}=\dfrac{x'-a}{\cos(\alpha+\beta)} \\ \dfrac{y-b}{\cos\alpha}=\dfrac{y'-b}{\cos(\alpha+\beta)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'-a=(x-a)\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} \\ y'-b=(y-b)\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x'-a=(x-a)\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha} \\ y'-b=(y-b)\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \text{como}: \cot ang\alpha=\dfrac{x-a}{y-b} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'-a=(x-a)\left(\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\dfrac{y-b}{x-a}\right) \\ y'-b=(y-b)\left(\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\dfrac{x-a}{y-b}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x'=a+(x-a)\cos\beta-(y-b)\operatorname{sen}\beta \\ y'=b+(y-b)\cos\beta+(x-a)\operatorname{sen}\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'=a+b\operatorname{sen}\beta-a\cos\beta+x\cos\beta-y\operatorname{sen}\beta \\ y'=b-b\cos\beta-a\operatorname{sen}\beta+x\operatorname{sen}\beta+y\cos\beta \end{array}\right.$$

Que son las ecuaciones del giro, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a' & \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ b' & \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{siendo } a' = a + b\operatorname{sen}\beta - a\cos\beta \\ \text{y } b' = b - b\cos\beta - a\operatorname{sen}\beta \end{array}\right\}$$

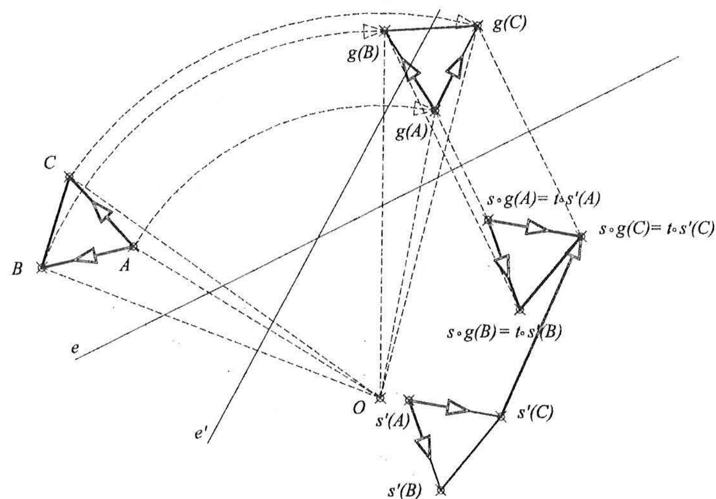
- Si el centro de giro coincide con el origen de coordenadas, $a = 0$ y $b = 0$, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

- **Composición de giro y simetría.**

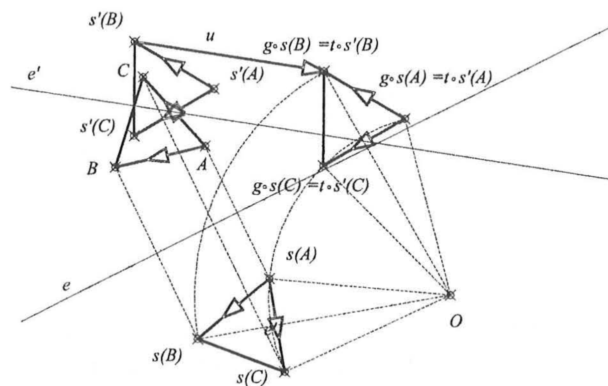
Consideramos dos casos:

1º- El eje de la simetría no contiene al centro de giro, entonces: la composición del giro y la simetría es una simetría con deslizamiento:



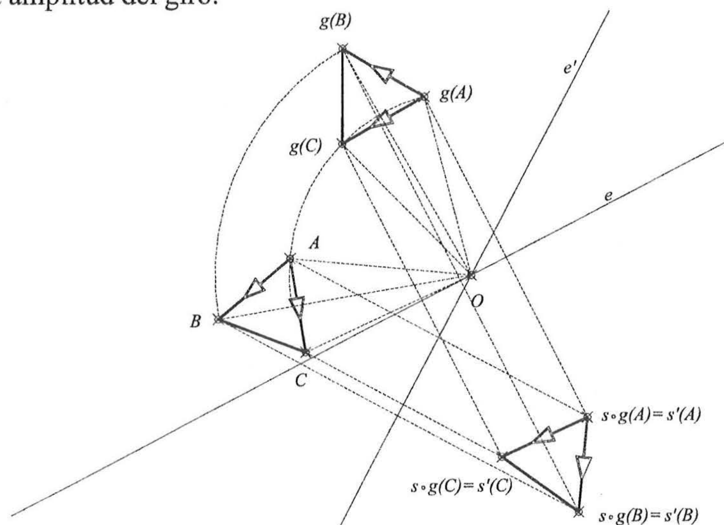
- Como se dijo en el apartado anterior, la descomposición de un giro en el producto de dos simetrías no es única y podemos descomponer el giro en un par de simetrías tales que uno de los ejes sea paralelo al de la simetría dada. Si componemos las dos simetrías de eje paralelo obtendremos una traslación con vector de módulo igual al doble de la distancia del centro de giro al eje de la simetría dada y una simetría cuyo eje forma un ángulo con el eje de la simetría inicial igual a la mitad de la amplitud del giro.

La composición no es conmutativa.

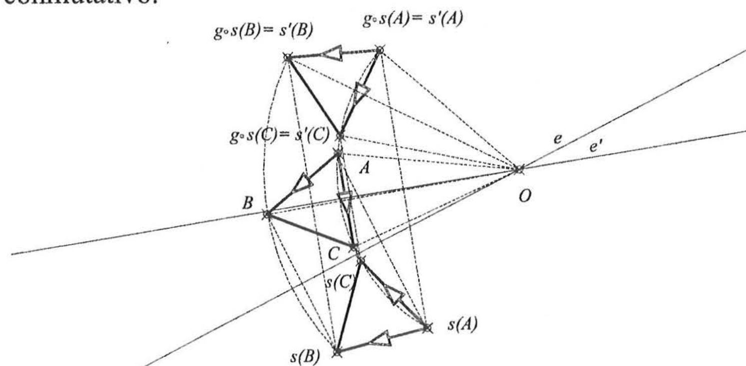


2º- El eje de la simetría no contiene al centro de giro, entonces:
la composición del giro y la simetría es otra simetría.

- Al descomponer giro en el producto de dos simetrías como en el epígrafe anterior y al contener el eje de simetría al centro de giro, una de las simetrías coincide con la dada, como la simetría es la inversa de si misma la composición es la identidad y nos queda sólo la otra simetría, cuyo eje forma un ángulo con el eje de la simetría inicial igual a la mitad de la amplitud del giro.



No es conmutativo:



Isometrías en el plano.

La expresión matricial de las ecuaciones de una afinidad (f,φ) respecto de una referencia cualquiera es:

$$Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & A \end{pmatrix} X$$

que al ser isometría es biyección y la matriz es inversible.

Si estamos en el plano con una referencia ortonormal $\Re=\{O,e_1,e_2\}$, la matriz A de la aplicación lineal φ asociada es cuadrada, ortogonal y de orden dos; la matriz de bloques es de orden tres.

A continuación vamos a estudiar todas las formas posibles de la matriz asociada a una isometría en el plano, cada una de ellas corresponderán una isometría diferente.

- Dada una matriz genérica de orden dos, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si es ortogonal cumple:

$$A^{-1}=A^T \Leftrightarrow A\cdot A^T=I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ca+db=0 \\ c^2+d^2=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2=1 \\ \text{se verifica para :} \\ a=\operatorname{sen}\alpha \text{ y } b=\cos\alpha \\ c^2+d^2=1 \\ \text{se verifica para :} \\ c=\cos\beta \text{ y } d=\operatorname{sen}\beta \\ \text{por la condición :} \\ \cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=\pm\frac{\pi}{2}$$

como: $0\le\alpha\le\pi$ y $0\le\beta\le\pi$, hay dos posibilidades:

1. $\alpha=\beta+\dfrac{\pi}{2}$ entonces: $\cos\alpha=-\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta$ y la matriz queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2. $\alpha=\beta-\dfrac{\pi}{2}$ entonces: $\operatorname{sen}\alpha=-\cos\beta$ y $\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta$ y la matriz queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

3. Por último, la matriz identidad es ortogonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que son los únicos tres tipos de matrices ortogonales en el plano vectorial euclídeo.

Cada una corresponderá a un endomorfismo ortogonal diferente:

- $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, es un endomorfismo ortogonal directo y se corresponde con una rotación.

  Los **giros** llevarán asociada una rotación y su matriz será de la forma:

  $$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline e & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ f & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{array}\right).$$

  Si discutimos el sistema $(A-I)X = -P$, sabremos los diferentes subespacios de puntos invariantes que admiten:

  $$\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - 1 \end{vmatrix} = (\cos\alpha - 1)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 2(1-\cos\alpha)$$

  luego salvo que el valor del ángulo sea $\alpha = 0$ se verifica:

  $$Rg(A-I) = Rg(A-I/P) = 2$$

  Es decir, salvo que sea la identidad, siempre mantiene un punto invariante que es el centro del giro.

- $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = -1$, es un endomorfismo ortogonal inverso y se corresponde con una simetría vectorial.

  Las simetrías afines llevarán asociada una simetría vectorial y su matriz será de la forma:

  $$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline e & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ f & \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{array}\right).$$

  Si discutimos el sistema $(A-I)X = -P$, sabremos los diferentes subespacios de puntos invariantes que admiten:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{vmatrix} = (\cos\alpha - 1)(-\cos\alpha - 1) + \operatorname{sen}^2\alpha = -\cos^2\alpha + 1 - \operatorname{sen}^2\alpha = 0$$

luego el $Rg(A-I) \langle 2$. Puesto que el rango no puede ser 0, el sistema es compatible indeterminado y tiene un subespacio de puntos invariantes de dimensión 1 si:

$$Rg(A-I) = Rg(A-I/P) = 1.$$

Sus ecuaciones son: $r \equiv (A-I)X = -P$ y es una **simetría ortogonal** respecto de la recta r.

El sistema es incompatible si:

$$Rg(A-I) = 1 \neq Rg(A-I/P) = 2$$

y no tiene puntos invariantes, es una **simetría con deslizamiento**.

- En el último caso es una **traslación**, cuyas matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline e & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 \end{array}\right).$$

CUADERNO

213.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

84-9728-194-2

